

30. *Torsion eines Flüssigkristalls*

Betrachten Sie in $d = 3$ Raumdimensionen einen Flüssigkristall zwischen zwei ebenen, zur x - y -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems parallelen Wänden bei $z = 0$ und $z = L > 0$. Die Wechselwirkung zwischen dem Flüssigkristall und den Wänden sei so stark, sodass der Direktor $\mathbf{n}(z)$ dort parallel zur Wand ist und bei $z = 0$ parallel bzw. bei $z = L$ im Winkel Φ relativ zur x -Achse ausgerichtet ist. Ferner sei die Wechselwirkung zwischen dem Flüssigkristall und den Wänden so kurzreichweitig, dass sie nur lokal an der Wandoberfläche wirkt und im Inneren des Flüssigkristalls verschwindet. Das System soll daher hier durch das freie Energiefunktional im Rahmen der Frank-Näherung ohne externes Magnetfeld beschrieben werden:

$$F[\mathbf{n}] = \frac{A}{2} \int_0^L dz \left(K_1 (\operatorname{div} \mathbf{n}(z))^2 + K_2 (\mathbf{n}(z) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n}(z))^2 + K_3 (\mathbf{n}(z) \times \operatorname{rot} \mathbf{n}(z))^2 \right) \quad (1)$$

mit der Querschnittsfläche A und den Frank-Moduli $K_i, i \in \{1, 2, 3\}$.

- Bestimmen Sie das Direktorfeld $\mathbf{n}(z)$.
- Bestimmen Sie die freie Energie $F_0(\Phi)$ im Gleichgewicht als Funktion des Torsionswinkels Φ .
- Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen dem Torsionswinkel Φ und dem vom Flüssigkristall zwischen den Wänden vermittelten Drehmoment $\mathbf{M}(\Phi)$.
- Diskutieren Sie die Resultate im Vergleich zu einer isotropen Flüssigkeit.

31. *Flüssigkristall im Magnetfeld*

Betrachten Sie wie in der vorherigen Aufgabe 30 einen Flüssigkristall zwischen zwei Wänden. Nun soll aber der Direktor an beiden Wänden in die gleiche Richtung ausgerichtet sein, d.h. $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(L)$, und es soll ein homogenes externes Magnetfeld \mathbf{H} vorliegen. Eine Beschreibung des Systems im Rahmen der Frank-Näherung mit externem Magnetfeld ist durch das freie Energiefunktional

$$F[\mathbf{n}] = \frac{A}{2} \int_0^L dz \left(K_1 (\operatorname{div} \mathbf{n}(z))^2 + K_2 (\mathbf{n}(z) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n}(z))^2 + K_3 (\mathbf{n}(z) \times \operatorname{rot} \mathbf{n}(z))^2 - \mu_0 \Delta \chi (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}(z))^2 \right) \quad (2)$$

gegeben, wobei A die Querschnittsfläche, $K_i, i \in \{1, 2, 3\}$, die Frank-Moduli und $\Delta \chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ die diamagnetische Anisotropie sind.

Fortsetzung auf Seite 2

Das Profil $\phi(z)$ soll die Winkelabweichung des Direktors $\mathbf{n}(z)$ bei z von der Direktorrichtung an der Wand $\mathbf{n}(0)$ beschreiben, d.h. $\mathbf{n}(z) \cdot \mathbf{n}(0) = \cos \phi(z)$. Bestimmen Sie für kleine Winkelabweichungen $\phi(z) \ll 1$ die Approximation von $F[\mathbf{n}]$ in Gl. (2) als quadratisches Funktional von $\phi(z)$ für die Fälle

(a) $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(L) = \mathbf{e}_x, \mathbf{H} = H\mathbf{e}_z,$

(b) $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(L) = \mathbf{e}_x, \mathbf{H} = H\mathbf{e}_y,$

(c) $\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(L) = \mathbf{e}_z, \mathbf{H} = H\mathbf{e}_x.$

32. Hamaker-Theorie der Van-der-Waals-Wechselwirkung

Betrachten Sie in $d = 3$ Raumdimensionen zwei kugelförmige Kolloide mit Radien R_1 und R_2 aus Molekülen der Typen M_1 und M_2 mit den Teilchenzahldichten ϱ_1 und ϱ_2 . Die Van-der-Waals-Wechselwirkung zwischen zwei Molekülen M_1 und M_2 im Abstand r sei durch das Potential

$$W_{\text{vdW}}(r) = -\frac{C}{r^6} \quad (3)$$

mit dem Van-der-Waals-Energiekoeffizient $C > 0$ gegeben.

Die Hamaker-Theorie der Van-der-Waals-Wechselwirkung besteht in der Annahme, dass das Wechselwirkungspotential $U_{\text{vdW}}(r)$ zwischen den beiden Kolloiden durch Superposition der Paarbeiträge $W_{\text{vdW}}(r)$ zwischen den Molekülen der Kolloide gegeben ist:

$$U_{\text{vdW}}(\mathbf{r}) = \int_{|\mathbf{r}_1| \leq R_1} d^3r_1 \int_{|\mathbf{r}_2| \leq R_2} d^3r_2 \varrho_1 \varrho_2 W_{\text{vdW}}(|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad |\mathbf{r}| > R_1 + R_2. \quad (4)$$

(a) Zeigen Sie für $r > R_1 + R_2$ die Beziehung

$$U_{\text{vdW}}(r) = -\frac{A}{6} \left(\ln \frac{r^2 - (R_1 + R_2)^2}{r^2 - (R_1 - R_2)^2} + 2R_1R_2 \left(\frac{1}{r^2 - (R_1 + R_2)^2} + \frac{1}{r^2 - (R_1 - R_2)^2} \right) \right) \quad (5)$$

mit der *Hamaker-Konstanten*

$$A = \pi^2 C \varrho_1 \varrho_2. \quad (6)$$

(b) Geben Sie $U_{\text{vdW}}(r)$ für den Spezialfall gleichartiger Kolloide ($R_1 = R_2 = R$) an und diskutieren Sie die Grenzfälle großer ($r \gg 2R$) und kleiner ($r \gtrsim 2R$) Abstände zwischen den Kolloiden.